

# Стохастические системы

© 2024 г. **М.М. ХРУСТАЛЁВ**, д-р физ.-мат. наук,  
Д.С. РУМЯНЦЕВ, канд. физ.-мат. наук (n3030@mail.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ УРАВНЕНИЙ ИТО ДЛЯ ФОРМИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА С ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ<sup>1</sup>

Предложен аналитический метод синтеза генератора случайного процесса с заданным спектром в виде линейной системы уравнений Ито. Предполагается стационарность случайного процесса, спектральная и соответствующая передаточная функции которого определены в виде рациональных дробей. Коэффициенты системы уравнений Ито генератора находятся из рекуррентных алгебраических соотношений. Метод ориентирован на работу с математическими моделями случайных процессов природы, такими как модель ветра Драйдена. Подробно представлена трансформация спектров модели порыва ветра по трем направлениям и приведены соответствующие стохастические уравнения.

*Ключевые слова:* стохастическое дифференциальное уравнение Ито, спектральная плотность, передаточная функция, формирующий фильтр, генератор случайных возмущений, модель турбулентности ветра Драйдена.

**DOI:** 10.31857/S0005231024070055, **EDN:** XRSLSE

### 1. Введение

Формирующий фильтр позволяет генерировать случайный сигнал с заданной спектральной плотностью из сигнала белого шума [1, § 6.6; 2, § 10.1; 3, § 5.1.5]. Формирующий фильтр и анализируемая система образуют некоторую расширенную систему, на вход которой действует белый шум (рис. 1). Здесь показан способ перейти от представления системы в терминах передаточных функций (изображенных на схеме) к стохастическим дифференциальным уравнениям. Результаты статьи пригодятся исследователям для добавления в динамическую модель случайных факторов и имитации природных явлений (движения воздушных масс, течения воды и т.д.).

Известно много моделей порывов ветра [4], но в статье подробно рассмотрена только модель турбулентности Драйдена [5], на выходе дающая стохастический процесс, определяемый спектрами скоростей. Спектральная плотность сигнала является четной дробно-рациональной функцией частоты и может быть представлена в виде двух комплексно-сопряженных сомножителей,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

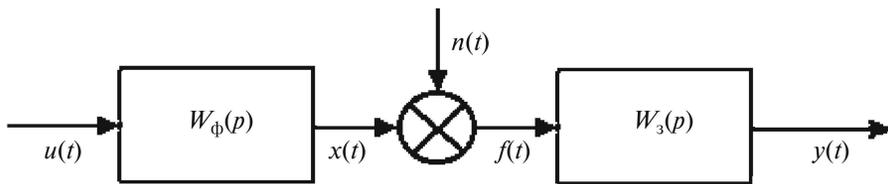


Рис. 1. Схема включения формирующего фильтра.

откуда и находится передаточная функция формирующего фильтра [1, § 6.6; 3, § 5.1.5].

Попытка напрямую написать дифференциальное уравнение высокого порядка, выход которого имеет заданный спектр, обычно приводит к появлению производных белого шума высокого порядка. Представление этих производных в виде обобщенных функций [6] и обобщение уравнений Ито в виде уравнений леонтьевского типа [6] известны, но такие уравнения сложны и мало исследованы. В [3, § 3.3.3] рассмотрен переход от линейного стохастического дифференциального уравнения высшего порядка к линейной системе стохастических дифференциальных уравнений первого порядка, но для поиска коэффициентов системы требуется дифференцировать коэффициенты исходного уравнения (если оно не является стационарным). Предлагаемый метод позволяет описать естественный случайный процесс с помощью хорошо изученных уравнений Ито [3]. Полученные уравнения, например, можно использовать совместно с уравнениями математической модели самолета [7].

Предложен способ получения относительно простых стохастических дифференциальных уравнений для синтеза выходного сигнала по известной передаточной функции. Далее будем рассматривать передаточные функции в предположении, что соответствующие им спектры известны.

Два способа преобразования любой дробно-рациональной передаточной функции, приводящие к одному и тому же результату, представлены далее. Функция разлагается на сумму дробей, числители которых – действительные числа, а знаменатели – многочлены. При этом все операции являются арифметическими. А блок-схему процесса можно изобразить в виде суммы интегрирующих звеньев. На основе новой записи можно составить систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Существует несколько более сложный способ аналогичного преобразования передаточной функции [8, §2.3]. Если передаточная функция  $W(p)$  задана, то для соответствующей системы линейных уравнений вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

необходимо найти матрицу  $A$  и вектор  $b$ . Выходной вектор  $c$  задан. Первая форма Фробениуса матрицы уравнений состояния  $A$  подбирается так, что ее характеристический многочлен совпадает со знаменателем передаточной

функции. Элементы вектора  $b$  находятся из решения системы уравнений

$$W(p) = c(Ep - A)^{-1}b$$

методом неопределенных коэффициентов приравниванием множителей при одинаковых степенях переменной  $p$  многочленов числителей слева и справа [8, пример 2.7].

В предлагаемом подходе выходной вектор  $c$  находится в процессе решения и заранее не известен. В результате обращение матрицы не требуется и вычисляются только коэффициенты уравнения Ито с помощью арифметических операций.

Преобразование для получения уравнения (1) не является уникальным [8]. Поэтому не всегда удается добиться «минимальной реализации» (1), т.е. получить минимально возможное количество переменных в уравнении Ито.

## 2. Постановка задачи

Пусть спектральная плотность исследуемого возмущения определена как  $\Phi(\omega) = |W(i\omega)|^2$ , где

$$(2) \quad W(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{a_0p^m + a_1p^{m-1} + \dots + a_{m-1}p + a_m}{b_0p^n + b_1p^{n-1} + \dots + b_{n-1}p + b_n},$$

здесь  $a_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $b_j$  ( $j = \overline{0, n}$ ) – постоянные действительные коэффициенты. Полюса и нули функции  $W(p)$  располагаются в левой полуплоскости.  $W(p)$  является передаточной функцией линейного дифференциального уравнения

$$(3) \quad \begin{aligned} b_0x^{(n)} + b_1x^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}x' + b_nx = \\ = a_0u^{(m)} + a_1u^{(m-1)} + \dots + a_mu. \end{aligned}$$

Блок-диаграмма формирующего фильтра представлена на рис. 2. Если на вход подавать стандартный белый шум (производную стандартного винеровского процесса)  $u(t)$ , то уравнение (3) становится стохастическим, но в общем случае содержит высшие производные белого шума.

Цель – заменить уравнение (3) системой линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющей двум условиям: а) система не содержит производных входного сигнала, б) ее линейно зависящий от состояния выход

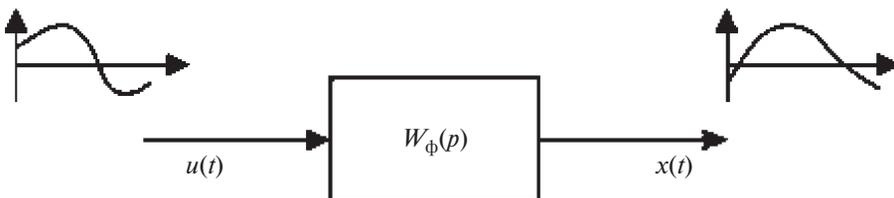


Рис. 2. Блок-диаграмма формирующего фильтра.

совпадает с выходом уравнения (3). Такая система уравнений, как показано ниже, легко преобразуется в систему уравнений Ито.

Оказывается, для преобразования достаточно представить передаточную функцию (2) в виде суммы рациональных дробей, числителями которых являются действительные коэффициенты (многочлены нулевого порядка). В случае, когда все нули знаменателя рациональной дроби вещественны, такое преобразование известно [9], но требует нахождения нулей знаменателя, что в общем случае возможно только численно. Предлагаемое преобразование не требует нахождения нулей и для любой правильной рациональной дроби как с вещественными, так и с комплексными нулями знаменателя, может быть выполнено аналитически. Коэффициенты модифицированной передаточной функции находятся последовательно из цепочки линейных уравнений.

Способ преобразования линейного стохастического уравнения  $n$ -го порядка (3) к эквивалентной линейной системе уравнений первого порядка, не содержащих производных белого шума, показан в [3, § 3.3.3]. При этом уравнение не является стационарным и коэффициенты  $a_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $b_j$  ( $j = \overline{0, n}$ ) зависят от времени  $t$ , а для поиска коэффициентов эквивалентной системы требуется дифференцировать функции  $a_i$ ,  $b_j$ . Для стационарной системы новые коэффициенты находятся из рекуррентных арифметических соотношений.

### 3. Преобразование передаточной функции

Основная идея состоит в том, чтобы представить исходную функцию  $W(p)$  в виде суммы нескольких функций  $W_i(p)$ ,  $i = \overline{1, m+n}$ , см. рис. 3. Входной и выходной сигналы не изменятся в результате такого преобразования.

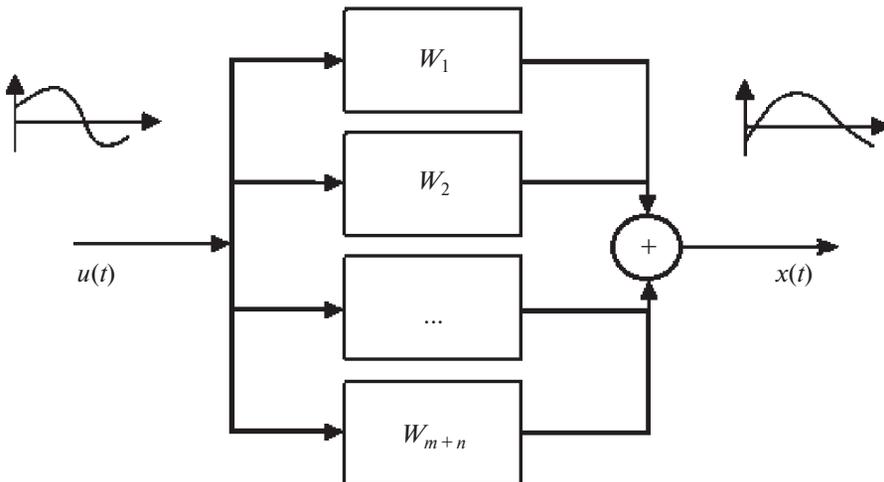


Рис. 3. Блок-диаграмма суммы нескольких формирующих фильтров.

Предлагаемое представление передаточной функции (2) имеет вид

$$(4) \quad W(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{\alpha_1}{p^{n-m}} + \frac{\alpha_2}{p^{n-m+1}} + \dots + \frac{\alpha_m}{p^{n-1}} + \\ + \frac{1}{Q_n(p)} \left( \frac{\beta_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{\beta_{n-2}}{p^{n-2}} + \dots + \frac{\beta_1}{p} + \beta_0 \right).$$

Количество коэффициентов  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $\beta_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) равно  $m + n$ . Они могут быть получены приравнованием левой и правой частей уравнений (2) и (4).

$$\begin{aligned} \beta_{n-1} + \alpha_m b_n &= 0, \\ \beta_{n-2} + \alpha_m b_{n-1} + \alpha_{m-1} b_n &= 0, \\ \beta_{n-3} + \alpha_m b_{n-2} + \alpha_{m-1} b_{n-1} + \alpha_{m-2} b_n &= 0, \\ \dots & \\ \beta_{n-m+1} + \alpha_m b_{n-m+2} + \dots + \alpha_2 b_n &= 0, \\ \beta_{n-m} + \alpha_m b_{n-m+1} + \dots + \alpha_2 b_{n-1} + \alpha_1 b_n &= 0, \\ \beta_{n-m-1} + \alpha_m b_{n-m} + \dots + \alpha_2 b_{n-2} + \alpha_1 b_{n-1} &= 0, \\ \dots & \\ \beta_2 + \alpha_m b_3 + \alpha_{m-1} b_4 + \dots + \alpha_2 b_{m+1} + \alpha_1 b_{m+2} &= 0, \\ \beta_1 + \alpha_m b_2 + \alpha_{m-1} b_3 + \dots + \alpha_1 b_{m+1} &= 0, \\ \beta_0 + \alpha_m b_1 + \alpha_{m-1} b_2 + \dots + \alpha_1 b_m &= a_m, \\ \alpha_m b_0 + \alpha_{m-1} b_1 + \dots + \alpha_1 b_{m-1} &= a_{m-1}, \\ \alpha_{m-1} b_0 + \dots + \alpha_1 b_{m-2} &= a_{m-2}, \\ \dots & \\ \alpha_2 b_0 + \alpha_1 b_1 &= a_1, \\ \alpha_1 b_0 &= a_0. \end{aligned}$$

Запишем краткую форму, представляющую собой систему рекуррентных уравнений, с помощью которых коэффициенты могут быть вычислены последовательно:

$$\alpha_1 = \frac{a_0}{b_0}, \quad \alpha_k = \frac{1}{b_0} \left[ a_{k-1} - \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s b_{k-s} \right], \quad k = \overline{2, m}, \\ \beta_0 = a_m - \sum_{s=1}^m \alpha_s b_{m-s+1}, \\ \beta_k = - \sum_{s=1}^m \alpha_s b_{m+k-s+1}, \quad k = \overline{1, n-m}, \\ \beta_k = - \sum_{s=1}^{n-k} \alpha_{-n+m+k+s} b_{n-s+1}, \quad k = \overline{n-m+1, n-1}.$$

Существует и другой путь преобразования передаточной функции. Пусть передаточная функция имеет вид

$$(5) \quad W^{(r)}(p) = \frac{a_0^{(r)} p^{n-r} + a_1^{(r)} p^{n-r-1} + \dots + a_{n-r-1}^{(r)} p + a_{n-r}^{(r)}}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n},$$

$1 \leq r \leq n$ . Верхний индекс  $(r)$  указывает на номер функции и степень полинома числителя. Степень полинома числителя  $W^{(r+1)}(p)$  меньше степени полинома числителя  $W^{(r)}(p)$ , так как  $n - (r + 1) < n - r$ . Обозначим  $B(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n$  и выполним ряд преобразований функции  $W^{(r)}(p)$ , состоящих в последовательном понижении степени полинома числителя до нуля.

$$\begin{aligned} W^{(r)}(p) &= \frac{a_0^{(r)} p^n + a_1^{(r)} p^{n-1} + \dots + a_{n-r}^{(r)} p^r}{p^r B(p)} = \\ &= \frac{1}{p^r B(p)} \left[ \frac{a_0^{(r)}}{b_0} B(p) - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} (b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n) + \right. \\ &\quad \left. + \left( a_1^{(r)} p^{n-1} + a_2^{(r)} p^{n-2} + \dots + a_{n-r}^{(r)} p^r \right) \right] = \\ &= \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{p^r} + \frac{1}{B(p)} \left[ \left( a_1^{(r)} - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} b_1 \right) p^{n-r-1} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left( a_{n-r-1}^{(r)} - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} b_{n-r-1} \right) p + \left( a_{n-r}^{(r)} - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} b_{n-r} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{B(p)} \left[ \frac{b_{n-r+1}}{p} + \frac{b_{n-r+2}}{p^2} + \dots + \frac{b_n}{p^r} \right]. \end{aligned}$$

Определим коэффициенты  $a_\alpha^{(r+1)} = a_{1+\alpha}^{(r)} - (a_0^{(r)}/b_0) b_{1+\alpha}$ ,  $\alpha = \overline{0, n - r - 1}$ , для новой функции  $W^{(r+1)}$ . Тогда

$$(6) \quad W^{(r)}(p) = \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{p^r} + W^{(r+1)}(p) - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{B(p)} \sum_{k=1}^r \frac{b_{n-r+k}}{p^k},$$

и  $W^{(r+1)}(p) = W^{(r)}(p) - \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{p^r} + \frac{a_0^{(r)}}{b_0} \frac{1}{B(p)} \sum_{k=1}^r \frac{b_{n-r+k}}{p^k}.$

Максимальное число шагов равно  $n - r$ . Функция  $W^{(r)}(p)$  определена на  $r$ -м шаге, необходимо найти  $W^{(r+1)}(p)$ ,  $W^{(r+2)}(p)$ ,  $\dots$ . Числитель последней функции  $W^{(r+s)}(p)$  является полиномом нулевого порядка, и тогда расчет будет закончен. Каждую следующую найденную функцию  $W^{(r+k+1)}(p)$  нужно подставить в текущую функцию  $W^{(r+k)}(p)$ .

#### 4. Формирование генератора случайных возмущений

Рассмотрим передаточную функцию (4), которая представляет собой сумму интегрирующих звеньев со своими коэффициентами усиления [10]. Для звена  $1/p^{n-m}$  соответствующее уравнение будет  $x_1 = u/p^{n-m}$ , или  $x_1^{(n-m)} = u$ . Звено  $1/p^{n-m+1}$  даст уравнение  $x_2 = u/p^{n-m+1} = u/(p^{n-m}p) = u/p^{n-m} \times 1/p = x_1 \times 1/p$ , или  $x_2' = x_1$ . Так последовательно находятся дифференциальные уравнения для первых  $m$  выходов. Точно так же, используя знаменатель  $Q_n(p)$ , получаем уравнение выхода  $x_{m+1}$ , который потом нужно еще  $n-1$  раз проинтегрировать с помощью слагаемых в скобках из (4). Последним шагом будет сложение всех выходов с соответствующими коэффициентами  $\alpha, \beta$ . Запишем систему дифференциальных уравнений и уравнение выхода, соответствующие передаточной функции (4) и (3):

$$(7) \quad \begin{aligned} x_1^{(n-m)} &= u, & x_2' &= x_1, & x_3' &= x_2, & \dots & x_m' &= x_{m-1}, \\ b_0 x_{m+1}^{(n)} &+ b_1 x_{m+1}^{(n-1)} &+ \dots &+ b_{n-1} x_{m+1}' &+ b_n x_{m+1} &= u, \\ x_{m+2}' &= x_{m+1}, & \dots & x_{m+n}' &= x_{m+n-1}, \\ x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m + \beta_0 x_{m+1} + \beta_1 x_{m+2} + \dots + \beta_{n-1} x_{m+n}. \end{aligned}$$

Порядок получившейся системы равен  $N \leq 3n - 2$ .

Система (3) может быть легко записана в виде системы уравнений первого порядка (7) и в предположении, что  $u(t)$  – стандартный белый шум, преобразована в систему уравнений Ито  $N$ -го порядка.

Преобразование не меняет передаточную функцию  $W(p)$  для выхода  $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots$  (см. (7)). Тем не менее передаточные функции выходов  $x_1, x_2, \dots$  имеют некоторое количество нулевых полюсов. Таким образом,  $W_k(p)$  для  $x_k, k = \overline{1, m}$  имеет вид  $W_k(p) = 1/p^{n-m+k-1}$ . На практике это приведет к нестабильности при моделировании процесса (из-за ошибок в расчетах). Однако эту ситуацию можно исправить, сделав замену  $p = (q - \Delta)/\lambda$  ( $q = \lambda p + \Delta$ ),  $\Delta/\lambda > 0$  в исходной передаточной функции  $W(p)$ . Тогда

$$\begin{aligned} W^*(q) &= \frac{P_m^*(q)}{Q_n^*(q)} = \frac{P_m \left( \frac{q-\Delta}{\lambda} \right)}{Q_n \left( \frac{q-\Delta}{\lambda} \right)} = \frac{\alpha_1^*}{q^{n-m}} + \frac{\alpha_2^*}{q^{n-m+1}} + \dots + \\ &+ \frac{\alpha_m^*}{q^{n-1}} + \frac{1}{Q_n^*(q)} \left( \frac{\beta_{n-1}^*}{q^{n-1}} + \frac{\beta_{n-2}^*}{q^{n-2}} + \dots + \frac{\beta_1^*}{q} + \beta_0^* \right). \end{aligned}$$

Обратным преобразованием  $q = \lambda p + \Delta$  получим

$$W(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} = \frac{\alpha_1^*}{(\lambda p + \Delta)^{n-m}} + \frac{\alpha_2^*}{(\lambda p + \Delta)^{n-m+1}} + \dots$$

Передаточные функции выходных компонент  $x_1, x_2, \dots$  такого разложения будут иметь полюса в левой полушлоскости.

## 5. Пример

Пусть задана передаточная функция

$$W(p) = \frac{p^2 + 2p + 1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}.$$

Требуется записать ее в виде (4) суммы дробей с полиномами нулевого порядка в числителях.

В результате преобразования получим

$$W^*(q) = W(q-1) = \frac{(q-1)^2 + 2(q-1) + 1}{(q-1)^3 + 3(q-1)^2 + 2(q-1) + 2} = \frac{q^2}{q^3 - q + 2}.$$

Здесь  $n = 3$ ,  $m = 2$ ,  $a_0^* = 1$ ,  $a_1^* = 0$ ,  $a_2^* = 0$ ,  $b_0^* = 1$ ,  $b_1^* = 0$ ,  $b_2^* = -1$ ,  $b_3^* = 2$ ,  $\alpha_1^* = \frac{a_0^*}{b_0^*} = 1$ ,  $\alpha_2^* = \frac{1}{b_0^*} [a_1^* - \alpha_1^* b_1^*] = 0$ ,  $\beta_0^* = a_2^* - [\alpha_1^* b_2^* + \alpha_2^* b_1^*] = 1$ ,  $\beta_1^* = -[\alpha_1^* b_3^* + \alpha_2^* b_2^*] = -2$ ,  $\beta_2^* = -[\alpha_2^* b_3^*] = 0$ .

$$W^*(q) = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{2}{q}\right) \frac{1}{q^3 - q + 2},$$

$$W(p) = \frac{1}{p+1} + \left(1 - \frac{2}{p+1}\right) \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2}.$$

Запишем решение вторым способом

$$W^{(1)}(q) = \frac{q^2}{q^3 - q + 2} = \frac{q^2}{B(q)}, \quad B(q) = q^3 - q + 2,$$

$$W^{(2)}(q) = \frac{q^2}{B(q)} - \frac{1}{q} + \frac{1}{B(q)} \times \frac{2}{q} = \frac{q^3 - B(q) + 2}{qB(q)} = \frac{1}{B(q)}.$$

Используем (6)

$$W^{(1)}(q) = \frac{1}{q} + \frac{1}{B(q)} - \frac{1}{B(q)} \frac{2}{q} = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{2}{q}\right) \frac{1}{B(q)} = W^*(q).$$

Результаты совпадают.

Запишем вывод уравнений Ито для  $W(p)$  в соответствии с (7). Первое слагаемое дает уравнение  $u = (p+1)x_1$ . Вторым уравнением будет  $u = (p^3 + 3p^2 + 2p + 2)x_2 = ((p+1)^3 - (p+1) + 2)x_2$ . Обозначим  $(p+1)x_2 = x_4$ ,  $(p+1)x_4 = x_5$ , тогда  $u = (p+1)x_5 - x_4 + 2x_2$ . Третьим уравнением будет  $u = (p+1)(p^3 + 3p^2 + 2p + 2)x_3$ , или  $(p+1)x_3 = x_2$ .

Искомая система уравнений Ито и уравнение выхода имеют вид

$$\begin{aligned} dx_1 + x_1 dt &= dw, & dx_2 + (x_2 - x_4) dt &= 0, \\ dx_3 + (x_3 - x_2) dt &= 0, & dx_4 + (x_4 - x_5) dt &= 0, \\ dx_5 + (x_5 - x_4 + 2x_2) dt &= dw, \\ x &= x_1 + x_2 - 2x_3. \end{aligned}$$

На основе передаточной функции была получена линейная система дифференциальных уравнений Ито, не содержащая производных входного сигнала. Конечно, выбор новой переменной был сделан так, чтобы в знаменателе передаточной функции легко выделить куб суммы, а потом получить линейные уравнения первого порядка.

## 6. Модель турбулентности ветра Драйдена

Министерство обороны США использует модель порывов ветра Драйдена в некоторых приложениях для проектирования и моделирования летательных аппаратов. Эта математическая модель рассматривает компоненты скорости непрерывных порывов ветра как случайные процессы [5, 11]. Документация MATLAB обеспечивает реализацию передаточной функции для порывов ветра [12]. Двенадцать передаточных функций определены для моделей порывов ветра в продольном, горизонтальном и вертикальном направлениях. Однако можно выделить только три типа различных функций, отличающихся от функций модели лишь постоянными коэффициентами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (см. [12]):

$$G_1(p) = A \frac{1}{1 + Cp}, \quad G_2(p) = A \frac{1 + Bp}{(1 + Cp)^2}, \quad G_3(p) = \frac{Ap}{1 + Cp} \times \frac{1 + Bp}{(1 + Dp)^2}.$$

Первый тип функции  $G_1(p)$  является простым интегратором и не требует преобразования. Требуемая система уравнений Ито для  $G_1(p)$  имеет вид

$$dx + \frac{1}{C}xdt = \frac{A}{C}dw.$$

Рассмотрим вторую. Требуется получить систему уравнений Ито для передаточной функции  $G_2(p)$ . Тогда

$$G_2^*(q) = G_2\left(\frac{q-1}{C}\right) = \frac{A}{C} \frac{Bq + C - B}{q^2} = \frac{A}{C} \left(\frac{B}{q} + \frac{C - B}{q^2}\right).$$

$$G_2(p) = \frac{A}{C} \left(\frac{B}{1 + Cp} + \frac{C - B}{(1 + Cp)^2}\right).$$

Искомая система уравнений Ито и уравнение выхода для  $G_2(p)$  имеют вид

$$dx_1 + \frac{1}{C}x_1dt = \frac{1}{C}dw, \quad dx_2 + \frac{1}{C}(x_2 - x_1)dt = 0,$$

$$x = \frac{A}{C} \left( Bx_1 + (C - B)x_2 \right).$$

Если сделать другую замену переменных  $q = p + 1$ , то получится довольно громоздкая система уравнений 5-го порядка. Предлагаем читателям убедиться в этом самостоятельно.

Рассмотрим третью функцию  $G_3(p)$ . Заменяем переменную:  $p = (q - 1)/D$ . Тогда

$$G_3^*(q) = G_3\left(\frac{q-1}{D}\right) = A \frac{Bq^2 + (D - 2B)q + B - D}{DCq^3 + (D^2 - DC)q^2}.$$

Представим последнее выражение, используя (4):

$$G_3^*(q) = A \left[ \frac{\alpha_1}{q} + \frac{\alpha_2}{q^2} + \frac{1}{b_0q^3 + b_1q^2} \left( \frac{\beta_2}{q^2} + \frac{\beta_1}{q} + \beta_0 \right) \right],$$

тогда

$$\begin{aligned} b_0 &= DC, & b_1 &= D^2 - DC, \\ \alpha_1 &= B/(DC), & \alpha_2 &= [D - 2B - B(D^2 - DC)/(DC)]/(DC), \\ \beta_0 &= B - D - (D^2 - DC) [D - 2B - B(D^2 - DC)/(DC)]/(DC), \\ \beta_1 &= 0, & \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Сделаем обратную замену переменных и получим функцию

$$G_3(p) = A \left[ \frac{\alpha_1}{1 + Dp} + \frac{\alpha_2}{(1 + Dp)^2} + \frac{\beta_0}{b_0(1 + Dp)^3 + b_1(1 + Dp)^2} \right].$$

Более подробно запишем вывод уравнений Ито для  $G_3(p)$ . Первое и второе слагаемые дают  $x_1 = \frac{u}{1+Dp}$ ,  $x_2 = \frac{u}{(1+Dp)^2} = \frac{u}{1+Dp} \times \frac{1}{1+Dp} = \frac{x_1}{1+Dp}$ . Рассмотрим третье слагаемое:  $x_3 = \frac{u}{b_0(1+Dp)^3 + b_1(1+Dp)^2} = \frac{u}{(1+Dp)^2} \times \frac{1}{b_0(1+Dp) + b_1} = \frac{x_2}{b_0(1+Dp) + b_1}$ . Тогда искомая система уравнений Ито и уравнение выхода для  $G_3(p)$  имеют вид

$$\begin{aligned} dx_1 + \frac{1}{D}x_1dt &= \frac{1}{D}dw, & dx_2 + \frac{1}{D}(x_2 - x_1)dt &= 0, \\ dx_3 - \frac{1}{Db_0}x_2dt + \frac{b_0 + b_1}{Db_0}x_3dt &= 0, \\ x &= A[\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \beta_0x_3]. \end{aligned}$$

Модель турбулентности ветра Драйдена не единственная. Например, модель фон Кармана [13] имеет другие передаточные функции, такие как

$$G(p) = A \frac{1 + Bp}{1 + Cp + Dp^2}.$$

Соответствующая система уравнений Ито для этой функции будет содержать 6 переменных. Преобразованную функцию здесь не приводим, потому что она оказалась слишком громоздкой. Возможно, была выбрана не очень удачная замена переменной. Поэтому сами исследователи в зависимости от коэффициентов  $C$  и  $D$  полинома знаменателя должны выбирать способ замены переменной.

Дискуссия о выборе модели турбулентности продолжается [14]. Видно, что число переменных в уравнении Ито для модели Драйдена не более трех, а в модели фон Кармана не менее шести. Соответственно увеличивается вычислительная сложность алгоритма моделирования порывов ветра.

## 7. Заключение

Предлагаемый метод преобразования передаточной функции позволяет привести ее к такому виду, что система дифференциальных уравнений, эквивалентная дифференциальному уравнению (3), не содержит производных входного сигнала  $u(t)$ . Подразумевая, что  $u(t)$  является белым шумом, системе легко преобразовать в систему уравнений Ито.

Результаты можно использовать не только для стохастических дифференциальных уравнений, но и для обычных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (3) со скалярными входным и выходным сигналами [3, § 1.3.4].

В представленном методе невозможно влиять на количество переменных, а в методе [8] можно влиять на количество выходных переменных для выходного сигнала  $y = cx$  (см. (1)) и, соответственно, на тип формирующего фильтра, изображенного на рис. 3. Поэтому в рассмотренном выше подходе структура выходного сигнала становится известна только в результате решения задачи. А в методе, описанном в [8], заранее известен тип выходного сигнала. Но предлагаемое решение в отличие от [8] не требует обращения матриц, а использует только рекурсивные арифметические операции для нахождения коэффициентов многочленов.

Здесь специально не приводятся результаты расчетов и численного моделирования динамических процессов для рассматриваемых в статье систем. На взгляд авторов, достаточно полное исследование с различными результатами моделирования выполнено в [14].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коновалов Г.Ф.* Радиоавтоматика: Учеб. для вузов по спец. «Радиотехника». М.: Высш. шк., 1990.
2. *Ким Д.П.* Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
3. *Пугачёв В.С., Синицин И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
4. *Hoblit Frederic M.* Gust Loads on Aircraft: Concepts and Applications. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. ISBN 0930403452, 1988.
5. *McLean D.* Automatic Flight Control Systems // Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1990, 593 p.
6. *Гликлик Ю.Е.* Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов // Сер. Матем. моделирование и программирование. Вестн. ЮУрГУ. 2012. № 27 (286). С. 24–34.
7. *Agapova A.S., Khrustalev M.M.* System shape optimization and stabilization of controlled quasi-linear stochastic systems that operate on an infinite time interval // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2017. V. 56. No. 1. P. 64–86.  
<https://doi.org/10.1134/S1064230717010099>

*Агапова А.С., Хрусталёв М.М.* Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 65–88.

8. *Веремей Е.И.* Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. Т. 1.
9. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. М.: Высш. шк., 1970. Т. 1. С. 369–370.
10. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
11. *Liermann H.W.* On the Application of Statistical Concepts to the Buffeting Problem // J. Aeronaut. Sci. 1952. V. 19. No. 12. P. 793–800.  
<https://doi.org/10.2514/8.2491>
12. MATLAB Reference Pages. The MathWorks, Inc. 2010. Retrieved Jan 31, 2024.  
<https://www.mathworks.com/help/aeroblks/drydenwindturbulencemodelcontinuous.html>
13. MATLAB Reference Pages. The MathWorks, Inc. 2010. Retrieved Jan 31, 2024.  
<https://www.mathworks.com/help/aeroblks/vonkarmanwindturbulencemodelcontinuous.html>
14. U.S. Military Handbook MIL-HDBK-1797, December 19, 1997.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньым.*

Поступила в редакцию 06.08.2023

После доработки 15.01.2024

Принята к публикации 20.01.2024